Formler Hyperbolsk geometri

I E (euklidsk geometri) finnes to typer størrelser. Den ene er lengdene og den andre er vinkelen. I tillegg kommer de trigonometnriske variantene av vinkelen. I $\mathbb{H}$ er det også mange varianter av lengder. Vi kan også her tale om en tilgrunnleggende vinkel, og i formlene kommer da ulike varianter av vinkelen til syne. a, α

Sidenes grunnvinkler er gitt ved a, b og c, mens vinklene er gitt ved α, β og γ. De trigonometriske variantene er ofte kort angitt ved $\hat{a} = \cosh a$, $\check{a} = \sinh a$ og $\bar{a} = \tanh a$.

Omskreven sirkel:

$$r_s^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2abc}{2(a-1)(b-1)(c-1)}$$

$$r_a^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2abc}{2(a-1)(b+1)(c+1)}$$

Tilsvarende for r_b, r_c
Eulers formel:

$$v^2 = \frac{r^2 s^2 - (r-s)^2}{(r^2-1)(s^2-1)}$$

Nipunktsirkelen har halve radien.

Sirkelvektorer i $\mathbb{H}$

Sirkelvektor, punktvektor og linjevektor:

$Cv(x,y,r) = \{\frac{x}{\sqrt{(r^2-1)(1-x^2-y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{(r^2-1)(1-x^2-y^2)}}, \frac{r}{\sqrt{(r^2-1)}}, \frac{I}{\sqrt{(r^2-1)(1-x^2-y^2)}}\}$
$Pv(x,y,r) = \{\frac{x}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}, 1, \frac{I}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\}$
$Lv(x,y,r) = \{\frac{x}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}, 0, \frac{I}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\}$

Akopyan shows that there are other candidates for H and O, and these will lie on the same line.

Ptolemaios theorem in $\mathbb{H}$

Ptolemaios theorem is given by sinus half-angles. Then it has the same forms as in $\mathbb{E}$

A paracycle has a positive and a negative side. A point lying on the paracycle will change sign when it moves on the cycle trought infinity. The distance between two points from one side to ananother change from sinh to cosh.

Fundament

$\mathbb{A}$ oppstår ut fra $\mathbb{O}$ ved at to elementer blir fikserte slik at de andre elementene blir relatert til disse. I $\mathbb{H}$ faller de to absolutter sammen til en, og da har vi bare en absolutt her.

1 Cayley - Klein metrikk

En generalisering av den projektive metrikk finnes av Arthur Cayley. I stedet for å ha linjen i uendelig som metrisk grunn, ser Cayley at man kan velge et hvilket som helst kjeglesnitt som basis for metrikken. Felix Klein fører dette videre, og finner en annen formulering av fundamentalmetrikken. Det gjør det også mulig å tilordne en vektoralgebra med klart definerte momeneter.

I det følgende gir vi en kort innføring av dette, og noen fenomener som viser seg her. Vi ser også hvordan denne metrikken kan sees i lys av sirkelgeoemtrien.

En sentral generalisering av det Eudklidiske har vi ved det såkalte "Klein-Cayley-planet". Arthur Cayley innførte dette i 1859, og det ble videreutviklet av Felix Klein i to artikler. Man ser i Kleins berabeidelse samme arbeidsmåte som ved hans bearbeidelse av Weg-curver. Han ønsker å utvikle denne metrikken for de ulike tilfellene.[1]

2 Metrikken

Den projektive geometri er uten egentlig metrikk, det vil si en definert avstand mellom for eksempel to punkter. Det som finnes her er dobbeltforholdet som er et mål for forholdet mellom lengdene som oppstår mellom fire punkter. Cayleys grep var å innføre det han kalte et absolutt kjeglesnitt. Har man nå to punkter (A og B) inne i en ellipse, og legger en linje gjennom punktene, da vil linjen skjære kjeglesnittet i to punkter (P og Q). Dobbeltforholdet mellom de fire punktene (df) vil da være et mål for en relasjon mellom de to puntene, og er den generaliserte avstand mellom dem. Kjeglesnittet danner det vi kunne kalle rammen til geometrien, og kalles det absolutte kjeglesnitt til en geometri. Ofte velger man sirkler som denne rammen og avstanden kan da også utrykkes ved koordinater. Metrikken dannes da med denne basis.

Caylay-Klein avstand mellom to punkter er gitt ved

$$s = \ln(\frac{PA}{AQ}\frac{QB}{BP})$$

Når man har to punkter som ikke ligger på kjeglesnittet kan man trekke en linje gjennom disse, som vil treffe kjeglesnittet i to nye punkter. Dobbeltforholdet mellom de fire punktene blir nå definert som en avstand mellom de to punktene. For at den vanlige addisjonsregel skal kunne gjelde settes avstanden lik logaritmen til dobbeltforholdet. Vi har altså:

2.1 Definisjon

Gitt enhetssirkelen, to punkter P og Q i denne, en linje gejnnom punktene, og punktene A og B der linjen skjærer enhetssirkelen. Da er Cayley-Klein-avstanden definert ved logaritmen til dobbletforholdet $\frac{PA}{AQ}\frac{QB}{BP}$ som

$$l(A, B) = \log(\frac{PA}{AQ}\frac{QB}{BP})$$

[1] I et brev til Sophus Lie skriver Klein:

Har vi tre punkter på en linje vil det gjelde

$$l(A, B) + l(B, C) = l(A, C)$$

Klein fant et utrykk for denne avstanden ved to punkters koordinater med enhetssirkelen som absolutt kjegglesnitt:

$$a = \arccos(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - 1}{\sqrt{1 - x_1^{-} y_1^2}\sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}}) \tag{1}$$

Klein gav avstanden som et integal, men man kan også definere vektorer for punktene. Man setter da

$$P = (x, y, i)$$

eller på normert form

$$P = \frac{(x, y, i)}{\sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}}$$

. Avstanden mellom to punkter blir da arccos til skalarproduktet mellom de to vekotrene.

3 Vektoralgebra

Vi ser her at avstanden føres tilbake til vinkellignende utrykk. I metriske relasjoner inngår ikke alltid denne, men nettopp cosinus til utrykket. Så vi kan også kalle selve skalarproduktet en avstand. Dette gir opprinnelsen til en vektoralgera i cayley-klein plantet.

Forholdet mellom dobbeltforholdet **d** og cosinusutrykket **a** er gitt

$$d - \frac{1}{d} = a^2(a^2 - 1)$$

4 Vektoralgebra

I det euklidske planet finner man relasjoner mellom lengder og vinkler ved å anvende forholdssetninger, og for eksempel pytagoras setning. I CK finner ikke ikke like forhold på det viset.

5 Forholdene i Cayley-Klein-planet

Vi ser på noen elementer og relasjoner i CK-planet.

5.1 Linje

5.2 Sirkelen

Alle punkter B som har samme CK-avstand fra et punkt A ligger på et kjeglesnitt som dobbeltberører det absolutte kjeglesnittet. Det er en tredimensjonal mengde slike kjeglesnitt, og de svarer til sirkler i planet.

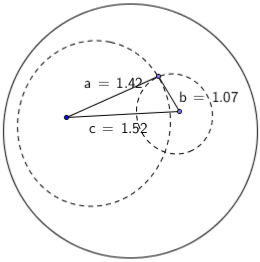


Figure 1: Pytagoras setning i Cayley-Klein rom: Produktet av katetene er lik hypotenusen.

$$a\ b = c$$

Vi kan se dette ved å sette konstant avstand mellom et fast punkt og et varierende punkt:

$$v0 \cdot v = r$$

$$\frac{\{p, q, i\}}{\sqrt{p^2 + q^2 - 1}} \cdot \frac{\{x, y, i\}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} = r$$

som gir

$$(px + qy - 1)^2 = r^2(p^2 + q^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1)$$

som gir et kjeglesnitt som lineærkombinajson av sirkelen og den doble linjen $l = (px + qy - 1)$ Sagt på annen måte: En sirkel er er en linearkombinasjon av grunnsirkelen og kvadratet av polaren til senteret til sirkelen.

Pytagoras setning gjør seg gjedlende på flere vis.

6 Cayley-Klein metrikk som sirkelmetrikk

Disse vektorene oppstår helt naturlig av sirkelgeometrien. En begrensning av sirkelrommet er å se på de sirkler som er ortogonale til en bestemt sirkel. Det er hensiktsmessig når det gjelder koordiantbeskrivelse å velg enhetssirkelen som den bestemmende sirkelen. Resultatet blir da en todimensjonal mengde sirker som alle er ortogonale til enhetssirkelen.

I denne mengden er det slik at radien til sirkene er bestemt når sentrum til sirkelen er bestemt. Vi har nemlig:

$$r^2 + 1 = x^2 + y^2$$

der $\{x, y\}$ er senteret til sirkelen. Når senteret til sirkelen ligger inne i enhetssirkelen blir radien imaginær,men den er liekvel entydig bestemt av senteret. Vi kan derfor operere med punkter der disse egentlig er sirkler med imaginær radius. Det viser seg at dette har flere implikasjoner.

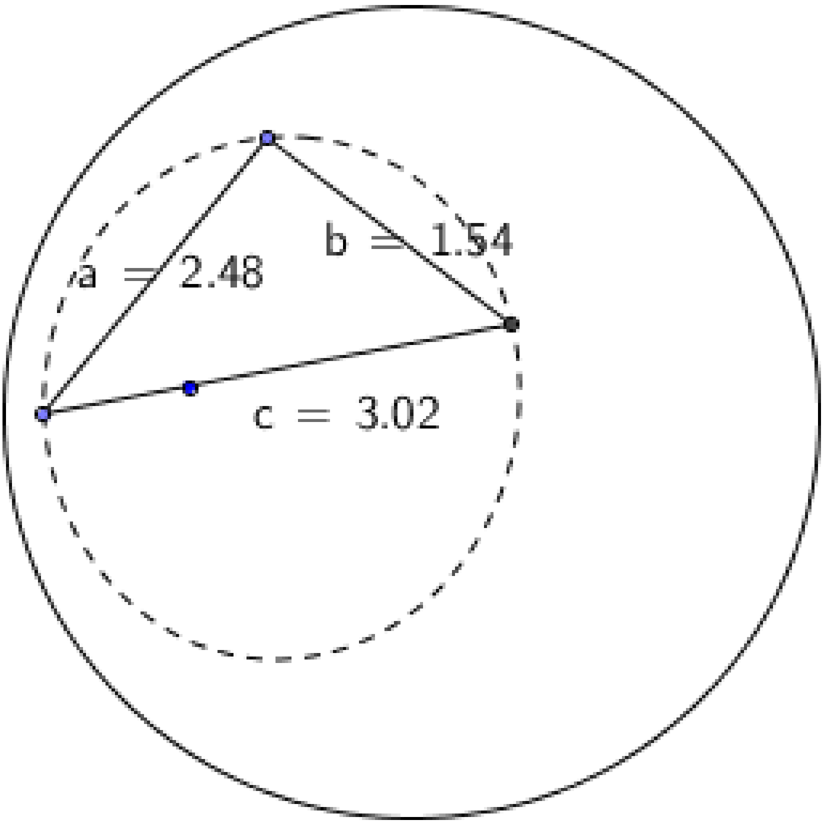


Figure 2: Pytagoras setning i Cayley-Klein rom: Produktet av katetene er lik hypotenusen.

$$a + b = c + 1$$

Den generelle sirkelvektor ved standardkoordinater er gitt ved:

$$\left\{\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{r^2 - x^2 - y^2 + 1}{2r}, -\frac{i\left(r^2 - x^2 - y^2 - 1\right)}{2r}\right\}$$

Setter vi inn for radien $r = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ forenkles denne:

$$s = \{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}, \frac{i}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}\}$$

Den homogene vektor har det enkle utrykket

$$s = \{x, y, i\}$$

som v har sett tidligere.

7 Avstand

Avstanden mellom to punkter gis nå som skalarproduktet mellom to vektorer.

$$a = u_1.u_2 = \frac{1 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}\sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}}$$

Den generelle vektoren for sirklene er gitt ved:

$$CK = \arccos(Ia)$$

og den algebraiske sammenhengen er gitt ved:

Så vidt jeg har kunnet se av litteraturen har man ikke gått videre for å finne algebraiske strukturer i denne geoemtrien, men det opstår helt naturlig ut fra sirkelgeometrien. Vektorene fra sirkelgeometrien får et enklere utrykk med begrensningen.

8 Vektoralgebraen ut fra grunnforhold

Relasjoner mellom lengder i CK planet kan man finne ut fra de grunnleggede vektorforholdene. For det første setter vi at en lineærrelasjon av to vektorer vil gi en ny vektor på samme linje som de to første vektorene.

$$\mathbf{R} = x\mathbf{P} + y\mathbf{Q}$$

Vi setter videre at avstanden mellom to punker er gitt som skalarproduktet mellom punktenes vektorer.

$$a(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$$

Skalarproduktet vektoren med seg selv er lik 1, fordi vi opererer med normerte vektorer.

8.1 Regning med lovmessniheter

Vi kan regne videre med lovmessigheter. For å finne høyden kan vi bruke pytagoras og sum av sider.

$$h^2 = \frac{2abc - a^2 - b^2}{c^2 - 1}$$

Når A og B er endepunktene på en sirkeldiameter, og C er et tredje punkt på periferien til sirkelen, da har vi relasjonen

$$a + b = c + 1$$

9 Kosmos

Geometrien inne i den absolutte sirkelen er den samme som den euklidske geometri i hele planet. Med metrikken som gjelder her er avstanden fra et punkt inne i sirkelen til Ω uendelig. Det er fullt mulig at kosmos er slik, at vi kommer til en slik grense i uendelig.

Utenfor Ω kan vi også snakke om avstander, men de er her negative i forhold de inne i absolutten.

Avstanden mellom et punkt inne i og et utenfor er imaginær.

10 Vektor- og algebraiske relasjoner

Vi kan anvende vektorregning på dette. Vektorene kan angis ved Cliffords grunnkoordinater.

$v = ai + bj + ck$ der $i^2 = 1$, $j^2 = 1$, $k^2 = -1$ og $ij = -ji = k$.

10.1 Midtpunktet mellom to punkter

En lineærkombinajon av to vektorer er gitt ved $u = xv + xw$. Skalerer vi denne ligningen med henholdsvis v v og u får vi ligningene

$$p = x + xq$$

$$1 = 2px$$

som gir

Midtpunktet mellom to vektorer er gitt ved Avstanden i dette systemet er gitt ved skalarvektoren mellom de to

10.2 Tre punkter på en linje

En variant for kriteriet for at tre punkter P, Q og Rligger på samme linje er gitt ved

$$(qp - r)P + (q^2 - 1)Q + (qr - p)R = 0$$

Ut fra dette kan det finnes et potensforhold med hensyn på en sirkel:

$$\frac{pr - 1}{p + r} = k$$

Denne kan ogå skrives som

$$\frac{(p+1)(q+1)}{(p-1)(q-1)} = k'$$

11 Rett vinkel og pytagoras

Når vi har gitt to punkter, og en rett vinkel spenner sine ben over disse, da vil i det Eukldske rom vinkelpunktet ligge på en sirkel. Slik er det ikke her, da vil punktet ligge på en ellipse i Kleinrommet.

Produktet av lengdene av katetene er lik lengden av hypotenusen

$$c = a\ b$$

12 Appollonius sirkel

Appollonius sirkel gjelder også her.

En kjent setning av Euler sier at gitt en firkant så finnes en sammenheng mellom sidene, diagonalene, og avstanden mellom midtpunktene i denne.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2$$

For Cayledisken gjelder

$$a + b + c + d = 4efm$$

13 Absolutt kjeglesnitt

Mengden av sirkler kan oppfattes som de kjeglesnitt som går gjennom de imagnære sirkelpunktene i uendelig. En generalisering av denne mengden er mengden av kjeglesnitt som tangerer et gitt kjeglesnitt i to punkter. Disse kan fremkomme som det geoetmriske stedet for alle punktenen som har den samme Cayley-Klein avstand til et gitt punkt. Det givne punktet ser senteret til sirkelen, og avstanden er radien til sirkelen.

Disse sirklene danner en geometri på samme måte som geometrien for de rodinære sirklene. Også her kan vi finne sirkelvektorer, og ut fra disse kan vi finne ulike relasjoner.

14 Projeksjon av kuler

Slik CK planet kan betraktes som en ortogonal projeksjon av kulesfaren på planet, slik kan sirklene i dette planet fremkomme som projeksjon av sirklene på dette planet. Disse kan igjen betraktes som snittet av enhetssfæren og sfærene som er ortogonale til denne. De siste kjenner vi vektorene for () og det bir dermed å finne disse igjen.

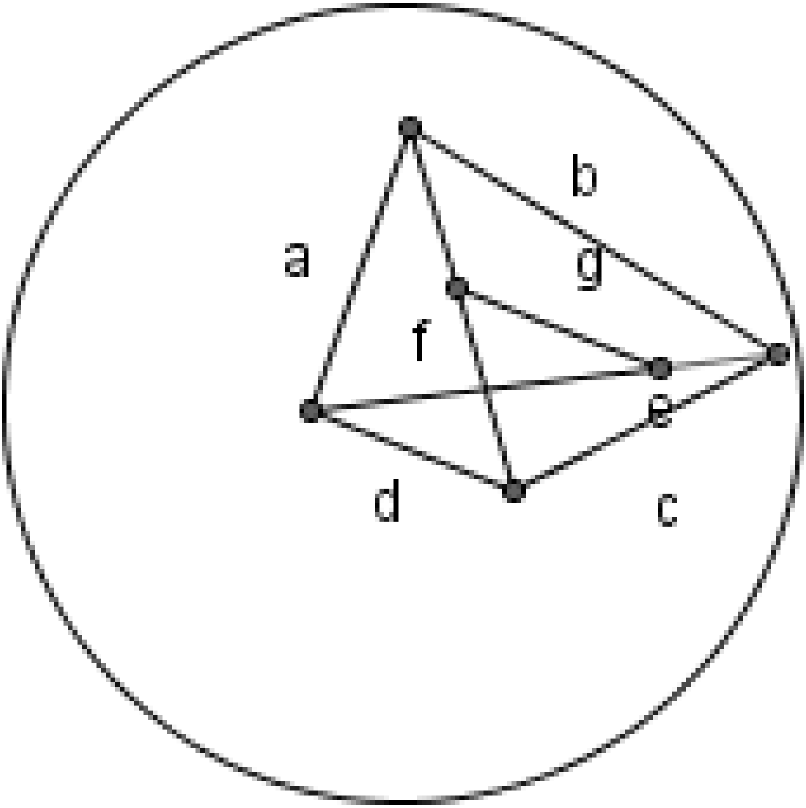


Figure 3: Forhodlet mellom sider diagonaler og avstand mellom midtpunkten:

Når man bare hodler seg til strukturene kan man lett miste saken av syne.

Forståelsen av organismen fører også til forståelse av rommet, fordi rommet er å betrakte som en særlig art organisme.

Nick Thomas foreslår at krefter er en opplevelse som oppstår når en naturlig bevegelse i et rom sees fra et annet roms synsvinkel. Han snakker om at et objekt kan være i to rom samtidig. Disse idene er ikke rett frem, men de kan ha noe for seg.

Clifford var av samme oppatning. Einstens generelle gravitasjonteori.

Den alminnelig måten å gå inn på rom og motrom på et å dualisere den euklidske geoemtrien, og så se på metrikken i de to rommene. Dette blir fort svært teknisk, og og de algebraiske utrykkene blir ikke så forståelige. Vi ser derfor på en mer anskuelig måte å komme inn i disse tingene på. Vi vil etterhvert komme til et generelt rombegrep som henger sammen med organimetanken.

15 Elementer og metrikk

I den euklidksek geometri regner man med punkter og linjer, og til disse er det knyttet den såkalte euklidiske metrikk. Translasjon og rotasjon er de naturlige bevegelser. Rotasjon er knyttet til sirkelen. Så sirkelen er også et naturlig element i den euklidiske geometri. Vi skal komme nøyere inn på det etterhvert, men antyder det her. Et punkt kan betraktes som en uendelig liten sirkel, og en linje som en uendelig stor sirkel. På sett og vis er derfor den euklidiske geoemtri en sirkelgeometri.

Den såkalte motromsgoemtrien er en geoemtri som på samme måte har kjeglesnitt som grunnelement. Et motrom består av alle kjeglsnitt gjennom med et felles brennpunkt.

Når vi snakker om rom og motrom, eller euklidks og counter-euklidisk rom, får man større innsikt når man ikke bare snakker om punkt og linjer i disse rommen, men også om sirkler og kjeglesnitt. Disse er de egentlige grunnelementene i disse rommene.

Man kan si at den eukldiske geoemtrien er geoemtrien bestående av punkter, linjer og sirkler. Sirkelen er kosntituernede.

Det såkalte motrommet består av alle kjeglesnitt med et felles brennpunkt, det såkalte motromsinfinity.

Hva rommet er blir egentlig først helt tydelig når man setter det i forbindelse med organsimetanken slik Goethe setter den frem. Han sier det slik: "Enhver organisme er mangfoldighet".

I organismen dreier det seg om en mangfoldihet av simulare objekter, som er ideelet sett de samme, men som arter seg forskjellig, de fremtrer ulikt. Rommet dannes da av at et av elementene blir referanse for de andre elementene i rommet. I den levede organisme er det balanse mellom elementene.

Punkter eller linjer kan ikke være grunnorgan i en organisk geometri, de kan ikke relateres til hverandre som slik. Først samspillet mellom punkter og linjer gir noe. Den enkleste organsike geoemtri består av sirkler som grunnelementer. Denne geoemtrien består av sirkler punkter og linjer. Punktet fremkommer når sirkelen blir uendelig liten, og linjen når sirkelen blir uendelig stor.

Av større betydning er når det gjedler forståelsen av den foranderlige organisme er goemtrien med kejglesnitt som grunnelement. Ved denne får man klart innblikk i rommets vesen, og det vi kaller motrom.

Ikke bare punkter kan forståes i lys av et absolutt kjeglesnitt, men også sirkelgeometrien. Gitt et absolutt kjeglesnitt. Da finnes en tredimensjonal mengde kjeglesnitt som berører dette dobbelt. Denne mengden tilsvarer mengden av sirkler i planet.

Geometrien kan betraktes som projeksjonen av kulegeometrien på en sfære ned på et plan. Projeksjonen av selve kulen blir Ω

Relasjoner som fremkommer i dette rommet kan utrykkes ved dobbeltforhold, slik at geomtrien gjelder på alle kjeglesnitt og for kvadriker når vi utvider til tre dimensjoner.

16 Projeksjon av kuler på planet

En kule otogonal til en sfære projiseres ned i xy-planet. Kulen blir da et kjeglesnitt som dobbelttangerer sirkelen i planet. Gitt radien r til kulen. Da vil z-verdien til senteret til kulen være gitt ved:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2 + r^2}$$

Når $x^2 + y^2 = p^2$ der p er punktets avstand til origo har vi det litt enklere utrykk:

$$z = \sqrt{1 - p^2 + r^2}$$

Når projeksjonen av senteret til kulen er p fra origo, og projeksjonen av perihel er q er det gitt en sammenheng med radius til kulen. Radius til kulene gitt ved parametrene p og q i planet:

$$r = \frac{(q - p)}{\sqrt{1 - q^2}}$$

Høyden, eller z-verdien er gitt ut fra p og q ved:

$$z = \frac{1 - p\,q}{\sqrt{1 - q^2}}$$

Kulevektoren for en kule ortogonal til enhetssfæren er gitt ved:

$$v = \{\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}, \frac{i}{r}\}$$

Eller når vi ikke har med normering:

$$v = \{x, y, z, i\}$$

Setter vi inn for z og også $p = \sqrt{x^2 + y^2}$får vi:

$$v = \{x, y, \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}q}{\sqrt{1 - q^2}}, i\}$$

17 Avstand

Vektoren til en sirkel med senter (x, y) og radius r er gitt ved

$$v = \{\frac{x}{\sqrt{-(r^2-1)(x^2+y^2-1}}, \frac{y}{\sqrt{-(r^2-1)(x^2+y^2-1}}, \frac{r}{\sqrt{r^2-1}}, \frac{i}{\sqrt{-(r^2-1)(x^2+y^2-1)}}\}$$

Fundamentalavstanden mellom to sirkler er gitt ved

$$d = \frac{a\,b - c}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}$$

der a og b er radier til sirklene, og c er avstanden mellom sentrene. Avstandene er her cosinusavstander.

Ut fra det kan vi finne de andre avstandene:

1. Sirkel - Sirkel $\frac{rs-d}{r's'}$
2. Sirkel - Linje $\frac{-d}{r'}$
3. Sirkel - Punkt $\frac{r-d}{r'}$
4. Linje - Linje $-d$
5. Linje - Punkt d'
6. Punkt - Punkt $1-d$

Radien til en sirkel er gitt ved

$$\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

der r er områdeavstand. Radien fremkommer her som relasjonen til absolutten.

Når fundamentalavstanden er gitt da er også hele sirkelmetrikken i området gitt.

17.1 Bevegelse

Avstanden er egentlig en bevegelse fra den ene sirkelen til den andre.

18 Potenssetningen

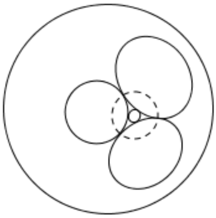
Potensen fra et punkt til en sirkel er gitt ved

$$\frac{(a+1)(b+1)}{(a-1)(b-1} = k$$

19 Bidrag til etableringen av en geoemtri

Når man ser på utviklingen av geometrien i det forrige århundre ser man sporene etter forsøk på å etablere en geoemtri. Ut fra disse forsøkene kommer blandt annet relativitensteorien.

Helt sentralt er forståelsen av rommet. Vi bringer her så vidt vi kan se nye momenter som allerede er berørt av Clifford. The second absolute.



For en som arbeider ut fra fenomenene er det ikke lett å komme inn i det språk som behersker matematikken i dag. Vi vil derfor arbeide helt forutsetnignsløst, og forsøke å bruke vanlig sunn fornuft.

Den generelle bestrebelse her er å se på geometrien for seg slik den dannes, algebraen som kan knyttes til denne, og de bevegelser og symmetriers som oppstrår. På sett og vi er alle disse aspektene fremme i Sofus Lies arbeider. Vi skal ikke følge disse, men referere til dem.

20 Metriske relasjoner

Her er noen metriske relasjoner

20.1 Descartes problem

Descartes problem fremstår nesten som i det Euklidiske tilfellet.

20.2 Innskreven sirkel

Descarts konfigurasjon i Cayley-rom

$$2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=(a+b+c+d)^2+4$$

En innskrivern sirkel gitt av de tre ortogonalsirklene.

$$r_0^2=r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3+1$$

21 Enhetssirkelen

Enhetssirkelen er et slags urbilde på det vi har satt oss fore, selv om selve de gometriske strukturene ikke fremkommer her. Men det gir ett blikk inn det vi kan kalle den vertikale struktur.

For det første har vi her å gjør med sirkelen som danner begrensningen til punktene som beveger seg her.